Isenmann - Pecatte

Théorème des lacunes de Hadamard

Lemme Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, vérifiant $D(0,1) \cup \{1\} \subset \Omega$.
Alors en considérant $Q(X) := \dfrac{X^M + X^{M+1}}{2}$, il existe $r > 1$ tel que $Q(D(0,r)) \subset \Omega$.

▷ 1ère étape : montrons que $Q(\bar{D}(0,1)) \subset \Omega$

Soit $z \in \bar{D}(0,1)$, on a alors :

- si $|z| < 1$, $|Q(z)| = |z|^M \dfrac{|1+z|}{2} \leqslant |z|^M < 1$ donc $Q(z) \in \Omega$
- si $z = 1$, $Q(z) = 1$ donc $Q(z) \in \Omega$
- si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, $|Q(z)| = \dfrac{|1+z|}{2} < 1$ et s'il y a égalité il existe λ tel que $z = \lambda$, on obtient $z = 1$, absurde.

Donc $|Q(z)| < 1$, d'où $Q(z) \in \Omega$.

▷ 2ème étape : cas général

On sait que $Q^{-1}(\Omega)^c$ est fermé par continuité de Q et $\bar{D}(0,1)$ est compact.
Ainsi, $\mu := d(Q^{-1}(\Omega)^c, \bar{D}(0,1)) > 0$ et est atteint. ——— à vérifier comment faire
Donc :
$Q(D(0, 1 + \frac{\mu}{2})) \subset \Omega$

Définition (suite lacunaire) Soit $(p_n)_n$ une suite d'entiers strictement positifs.
On dit que $(p_n)_n$ est une suite lacunaire s'il existe $\alpha > 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} \geqslant \alpha p_n$.

Théorème des lacunes d'Hadamard Soit $(p_n)_n$ une suite lacunaire et soit $S = \sum_n a_n z^{p_n}$ une série entière de rayon de convergence 1. Alors tous les points de S sont singuliers.

▷ Montrons que 1 est un point singulier.

Supposons par l'absurde que 1 soit un point régulier.
Il existe alors un ouvert Ω contenant $D(0,1) \cup \{1\}$ et il existe g une fonction analytique prolongeant S sur Ω. ——— définition de point régulier

Or :

- $(p_n)_n$ est lacunaire donc : $\exists \alpha > 1, \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant \alpha$
- $\lim\limits_{M \to +\infty} \dfrac{M+1}{M} = 1$ donc : $\exists M \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant \alpha > \dfrac{M+1}{M}$
- d'après le lemme pour $Q(X) = \dfrac{X^M + X^{M+1}}{2}$, on a : $\exists r > 1$, $Q(D(0,r)) \subset \Omega$

On définit : $F : z \in D(0,r) \longmapsto g \circ Q(z)$ fonction holomorphe comme composée donc développable en série entière.
Il existe alors $(b_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, avec rayon de convergence supérieur ou égal à r.
On obtient :
$\forall z \in D(0,1)$, $F(z) = g(Q(z)) = S(Q(z))$ car $Q(D(0,1)) \subset D(0,1)$

Or :

- $S(Q(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n Q(z)^{p_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{p_n} \binom{p_n}{k} \dfrac{z^{(M+1)k} z^{M(p_n-k)}}{2^{p_n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{2^{p_n}} \sum_{k=0}^{p_n} \binom{p_n}{k} z^{Mp_n+k}$
- $Mp_n < (M+1)p_n < Mp_{n+1} < (M+1)p_{n+1}$ donc les développements de $(z^M + z^{M+1})^{p_n}$ sont des combinaisons linéaires de puissances de z différentes ——— les supports des $a_n Q(X)^{p_n}$ sont deux à deux disjoints

Donc, par unicité du développement en séries entières,
$\forall N \in \mathbb{N}, \forall z \in D(0,1), \sum_{n=0}^{N} a_n Q(z)^{p_n} = \sum_{n=0}^{(M+1)p_N} b_n z^n$

On a ainsi deux polynômes qui coïncident sur $D(0,1)$ et sont analytiques sur $\mathbb{C}$ ——— entières car polynomiales, donc par le théorème de prolongement analytique, on a égalité sur $\mathbb{C}$.

Donc pour $x \in]1, r[$,
$\sum_{n=0}^{N} a_n Q(x)^{p_n} = \sum_{n=0}^{(M+1)p_n} b_n x^n \xrightarrow[N \to +\infty]{} F(x)$ car il y a convergence normale sur $\bar{D}(0,\rho)$ pour $\rho < r$

Or, $|Q(x)| > 1$ donc le rayon de convergence de $\sum a_n z^{p_n}$ est supérieur à 1 : contradiction ! ——— Rayon 1 par hypothèse

Donc 1 est un point singulier

▷ Cas général

Soit $e^{i\theta} \in \mathbb{S}$.

On définit $G := \sum a_n e^{ip_n\theta} z^{p_n}$. Alors G est une série lacunaire de rayon de convergence 1.

D'après ce qui précède :

1 est un point singulier de G

Donc :

$e^{i\theta}$ est un point singulier de $\mathbb{S}$